Stabilité Structurelle Cinématique

J. Lerbet*[1], N. Challamel[2], F. Nicot[3], and F. Darve[4]

[1]UFR Sciences et Technologie – Université d'Evry Val d'Essonne – France
[2]Laboratoire de Génie Civil et Génie Mécanique – INSA de Rennes, Université Européenne de Bretagne, – France
[3]Unité de Recherche Erosion Torrentielle–Neige et Avalanches – CEMAGREF – France
[4]Laboratoire "Sols, Solides, Structures-Risques – INPG – France

Résumé

Tout système (mécanique ou pas) est décrit par des variables et son évolution est elle-même décrite par des relations souvent différentielles entre ces variables. Par ailleurs, ces relations impliquent des paramètres spécifiant ce système parmi une classe donnée. La notion de stabilité structurelle consiste à s'interroger sur les transformations subies par les solutions lorsque ces paramètres changent. Ces questions sont cruciales car dans la pratique on ne possède qu'une connaissance imparfaite de ces paramètres. Par exemple, lorsque ces paramètres sont les conditions initiales du mouvement, cela conduit à la notion de stabilité au sens de Lyapounov. Dans cette présentation, on s'intéresse à une perturbation qualifiée de cinématique du système mécanique étudié et consistant à supprimer des degrés de liberté puis à tenter d'observer les propriétés de stabilité mécanique consécutive à ce type de "perturbation" cinématique. Nous appellerons cela la stabilité structurelle cinématique.
Cette question est naturelle et ancienne en mécanique et tout enseignant qui aborde les questions de stabilité des systèmes et structures mécaniques signale à ses étudiants qu'une conséquence des propriétés du quotient de Rayleigh dans le cadre des structures élastiques conservatives est que l'ajout de contraintes cinématiques élève le spectre et est donc favorable au sens de l'instabilité par divergence (la seule dans ce cas là). Nous dirons donc que la SSC (sous entendu de la stabilité au sens de Lyapounov) des structures élastiques conservatives est universelle.

De manière surprenante (et il serait d'ailleurs intéressant de comprendre pourquoi), dans l'histoire de notre discipline cette question en est restée là depuis le XIX siècle et c'est elle qui est envisagée ici. Nous nous intéresserons plus spécifiquement à la généralisation suivante immédiatement envisageable vis à vis de la SSC universelle précédemment mentionnée. Les systèmes envisagés seront donc supposés discrets élastiques non conservatifs et les instabilités envisagées seront les instabilités par divergence et même dans un cadre linéaire. Le seul changement vis à vis de ce qui est enseigné traditionnellement est donc la perte de conservativité des efforts extérieurs. Il se traduit par la perte de symétrie de la matrice de rigidité $K = K(p)$ où p représente le chargement non conservatif (on le considèrera comme unidimensionnel et monotone).
Cette problématique a été l'occasion dans les cinq dernières années de nombreux résultats et développements théoriques. Même dans ce cadre assez simple, les résultats concernant la SSC changent radicalement. Le résultat central est le suivant: la SSC dans le cadre de la divergence des systèmes élastiques non conservatifs est conditionnelle et la condition porte

*Intervenant

sur la partie symétrique Ks de la matrice de rigidité: elle doit définir une forme quadratique définie. Les conditions de continuité sur p conduisent au caractère défini positif de Ks. Cela signifie que si p est la plus petite valeur positive de p pour laquelle Ks(p) cesse d'être définie positive alors la SSC est asurée sur [0; p[. Pour p = p, on peut trouver (sur l'image du cône de Ks(p) par une application convenable) une contrainte cinématique déstabilisant par divergence le système non contraint. Il est remarquable de retrouver par cette voie le critère dit du travail du second ordre de Hill formulé en 1958 pour des pertes d'unicité dans le cadre de la plasticité associée et portant sur la matrice de rigidité tangente. Nous évoquerons divers développements relevant notamment de l'algèbre linéaire liés à ces travaux et résultats: notions de matrice m-définie positive, de degré géométrique de non conservativité et de compression d'un opérateur. Nous donnerons pour conclure des éléments sur les extensions tant des résultats que de la problématique.